Analiza II.1*

Kolokwium, 26 stycznia 2023

UWAGA: Każde zadanie oddajemy na oddzielnej kartce.
W każdym zadaniu należy wyraźnie powoływać się na wykorzystywane twierdzenia (dowodzone na wykładzie lub ćwiczeniach).
Prosimy o czytelne pisanie rozwiązań – prace nieczytelne nie będą sprawdzane.
Czas pisania: 180 min.

Zadanie 1: Niech $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji mierzalnych. Wykazać, że

$$A := \{x \in \mathbb{R} \colon \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\} \subset \mathbb{R}$$

jest zbiorem mierzalnym w sensie miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}$.

Zadanie 2: Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_V n \ln(1+\tfrac{x}{n}) \frac{y}{x^2+y^2+z^2}\, \mathrm{d}l_3, \qquad V := \{x, y, z > 0, \quad x^2+y^2+z^2 < \sqrt{z}\}.$$

Zadanie 3: Niech f będzie funkcją mierzalną, ograniczoną na $\mathbb{R}$. Wykazać, że jeżeli dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ oraz dowolnego $d > 0$ zachodzi

$$\int_{[x,x+d]} f \,\mathrm{d}l_1 = 0$$

to $f(x) = 0$ dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4: Niech f będzie funkcją ciągłą, całkowalną na $[0, +\infty)$,

$$F(k) := \int_{[0,+\infty)} f(x)\cos(kx)\, \mathrm{d}l_1(x).$$

Załóżmy, że F jest całkowalna na $\mathbb{R}$.

a) Wykazać, że dla $x > 0$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} F(k)\cos(kx) e^{-\varepsilon|k|}\, \mathrm{d}l_1(\overset{k}{\cancel{x}}) = f(x).$$

b) Wywnioskować, że

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} F(k)\cos(kx)\, \mathrm{d}l_1(\overset{k}{\cancel{x}}) = f(\cancel{x}), \qquad x > 0.$$

Zadanie 5: Niech $\delta > 0$ oraz

$$A := \{x \in [0,1] : \quad \exists p_n,\ q_n \in \mathbb{N} : \quad (q_n) \text{ ściśle rosnący },\ |x - \tfrac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^{2+\delta}}\}.$$

Wykazać, że A jest zbiorem miary Lebesgue'a zero.